O počtu prvočísel menších než nějaká zadaná veličina.

Bernhard Riemann

5. dubna 2012

přeložil RNDr. Karel Vašíček

(Monatsberichte der Berliner Akademie, listopad 1859) Mně se zdá, že poděkování za čest, kterou mně prokázala Akademie, když mě zvolila mezi své korespondenty, mohu nejlépe vyjádřit tím, že, když bez meškání využiji poskytnuté právo, učinit sdělení o svých výzkumech v oblasti rozložení prvočísel, tj. o otázce, která, možná, nezdá se zbavenou zájmu, když zmíním, že v průběhu dlouhé doby poutala pozornost Gausse a Dirichleta.

V těchto výzkumech mně sloužila jako východisko ta okolnost, že, jak bylo poznmenáno Eulerem, platí vztah

$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma\frac{1}{n^s}$, přičemž $\boldsymbol{p}$ probíhá zde všechna prvočísla, a $\boldsymbol{n}$ - všechna celá kladná čísla. Funkci komplexní proměnné $\boldsymbol{s}$, představované těmito identicky rovnými vyjádřeními, pokud konvergují, označuji pomocí $\varsigma(s)$. Ale obě konvergují jen v tom případu, když reálná část $\boldsymbol{s}$ je větší než 1; ostatně, lehce je možné stanovit i takovou reprezentaci uvedené funkce, které neztrací smysl ani při takjových hodnotách $\boldsymbol{s}$. Z rovnice . $\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$ se obdrží nejdříve $\Pi(s-1)\varsigma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$.

Teď se uvažuje integrál $\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$, kde se jako integrační cesta přijímá křivka, jdoucí od $+\infty$ do $+\infty$ a obepínající oblast, ve které kromě $x=0$ nejsou singulární body funkce, stojící za integrálem, lehkce se přesvědčíme, že tento integrál se ttransformuje do tvaru $(e^{-nsi} - e^{nsi})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$, za předpokladu, že v mnohoznačné funkci $(-x)^{s-1} = e^{(\text{s-1})\log(-x)}$ logaritmus $(-x)$ je tak určen, aby byl reálný při záporných hodnotách $\boldsymbol{x}$. Odsud uzavřeme, že $2\sin\pi s\Pi(s-1)\varsigma(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$, kde integrování se uýskuteční tak, jak toto bylo právě vysvětleno.

Tato poslední rovnice nám teď dává hodnotu funkce $\varsigma(s)$ pro každé libovolné komplexní $\boldsymbol{s}$ a ukazuje, že ta je jednoznačná i pro všechny konečné hodnoty $\boldsymbol{s}$, kromě 1, je konečná, přitom ta se promění v nulu, když $\boldsymbol{s}$ se rovná nějakému zápornému sudému číslu. (1)

Když je reálná část $\boldsymbol{s}$ záporná, pak hodnota funkce za integrálem si nekonečně velkým modulem hodnotách $\boldsymbol{x}$ jsou nekonečně malé, a proto je možné si představit, že integrace se uskutečňuje ne v kladném směru po křivce, obepínající výše vzpomínanou oblast, a v záporném směru po křivce, obepínající teď tu oblast, kterou jsme dříve uvažovali jako ležící vně křivky. Ale v této poslední oblasti funkce, stojící za symbolem integrálu, je nespojitá, jmenovitě odpovídající hodnotám ***x***, mnohonásobným v $\pm 2\pi i$,a tudíž, integrál je roven sumě integrálů, vybraných v záporném směru po drahách, obklopující takové hodnoty. Integrál, vybraný po dráze, obklopující hodnotu $n 2\pi i$, je roven $= (-n2\pi)^{s-1}(-2\pi i)$, proto se obdrží vztah

$2\sin \pi s \Pi(s-1)\varsigma(s) = (2\pi)^s \Sigma n^{s-1}((-i)^{s-1} + i^{s-1})$, tedy vztah mezi $\varsigma(s)$ a $\varsigma(1-s)$. Využijeme-li známé vlastností funkce Π, tento výsledek je možné vyjádřit i takovým způsobem: vyjádření $\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\varsigma(s)$ zůstane nezměněný, když se ***s*** zamění za ***1-s*** .

Tato vlastnost funkce $\varsigma(s)$ mně podnítila, v obecném členu řady $\sum \frac{1}{n^s}$ uvést součinitel $\Pi(\frac{s}{2}-1)$ místo $\Pi(s-1)$; při tom se získá